Практическое занятие
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Скалярное произведение векторов

Определение 1. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Модулем вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ (или длиной вектора $\vec{a}$) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.
2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^{\,2}=\left|\bar{a}\right|^2$$

$$\bar{a}^{\,2}=\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0^\circ=\left|\bar{a}\right|^2 \Rightarrow \boxed{\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}^{\,2}}}$$

3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=0}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\left|\bar{i}\right|^2=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=\left|\bar{i}\right|\cdot\left|\bar{j}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\bar{i}\cdot x_2\cdot\bar{i}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+y_1\cdot\bar{j}\cdot y_2\cdot\bar{j}+$$

$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+z_1\cdot\bar{k}\cdot z_2\cdot\bar{k}=$$

$$=\boxed{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$

В координатной форме: $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a}=(3;-2;6)$; $\bar{b}=(7;4;9)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$**.**

Решение. $3\cdot7+(-2)\cdot4+6\cdot9=21-8+54=67\neq0$, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\bar{a}=(1;2;-2)$; $\bar{b}=(2;-1;2)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$**.**

Решение. $\cos\varphi=\dfrac{1\cdot2+2\cdot(-1)+(-2)\cdot2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=-\dfrac{4}{3\cdot3}=-\dfrac{4}{9}$

Тогда: $\varphi=\pm\arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right)+2\pi n=\pm(\pi-\arccos\dfrac{4}{9})+2\pi n, n\in Z$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\bar{p}=2\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$**,** если $\bar{a}=(4;1;-2)$; $\bar{b}=(1;2;3)$.

Решение. Зная, что $\cos\varphi=\dfrac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|}$, определим координаты векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$:

$$\bar{p}=(2\cdot4+1;2\cdot1+2;2\cdot(-2)+3)=(9;4;-1)$$

$$\bar{q}=(4-1;1-2;-2-3)=(3;-1;-5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\bar{p}\cdot\bar{q}=9\cdot3+4\cdot(-1)+(-1)\cdot(-5)=27-4+5=28$$

Их длины равны:

$$|\overline{p}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{81+16+1} = \sqrt{98}$$

$$|\overline{q}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

Тогда, $\cos\varphi = \dfrac{28}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{35}} = \dfrac{28}{\sqrt{3430}}$,

следовательно, $\alpha = \pm\arccos\dfrac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n \in Z$.

Задания для решения в аудитории

1. Перпендикулярны ли векторы:

а) $\overline{a} = (7;-3;2)$; $\overline{b} = (1;7;7)$

б) $\overline{a} = (10;6;2)$; $\overline{b} = (2;3;1)$

в) $\overline{a} = (-4;9;5)$; $\overline{b} = (4;-9;-5)$

2. Даны два вектора $\overline{a} = (7;1;-25)$, $\overline{b} = (21;-3;-8)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. Даны вершины треугольника. Определить его внутренние углы, если A(2;5;4), B(3;1;-5), C(0;-7;1).

4. Раскрыть скобки в выражении $(2i - j)\cdot j + (j - 2k)\cdot k + (i - 2k)^2$